CENTRO EDUCACIONAL MARAPENDI – CEMP

GEOMETRIA - Prof. Clovis Reis

GEOMETRIA ANALÍTICA

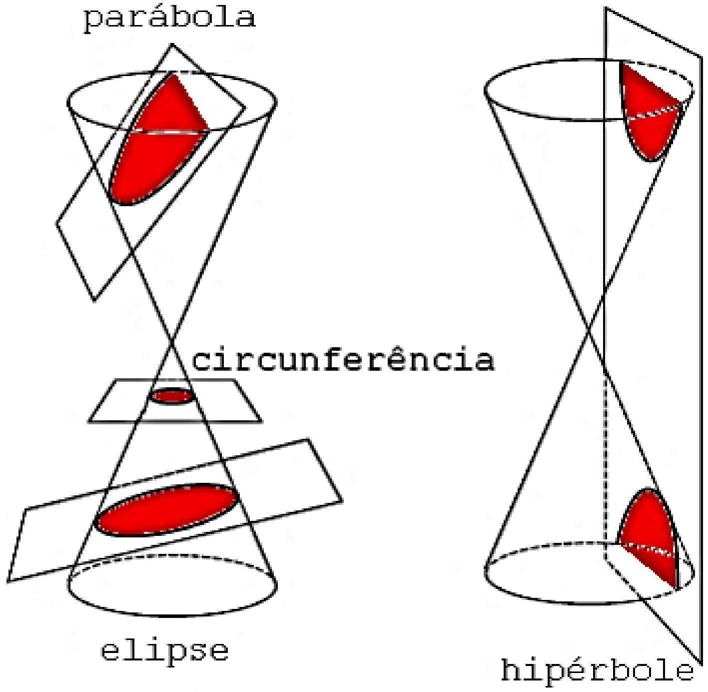
CÔNICAS

1. SURGIMENTO DAS CÔNICAS

Figuras originadas dos cortes do cone

São chamadas de cônicas as figuras geométricas que surgem dos cortes de uma outra figura, o cone. Existem quatro tipos de figuras que resultam dessa ação, chamadas de circunferência, elipse, parábola e hipérbole.

Esses cortes podem ser chamados ainda de secções cônicas e, na Matemática, seus estudos pertencem à geometria analítica. As características do corte definem o tipo de figura.



O surgimento das cônicas

As cônicas começaram a ser estudadas na Grécia e teve como principais estudiosos Euclides, Arquimedes e Menecmo. Esse último é, inclusive, considerado o descobridor das cônicas. As teorias em torno dessas figuras geométricas começaram como a busca pela solução da duplicação do cubo.

Não se sabe ao certo como esse problema surgiu, mas acredita-se que possa ter sido um pedido do Rei Minos. A história diz que o rei pediu que o túmulo dos seu filho, Glauco, fosse dobrado de tamanho sem perder o formato.

Outra operação semelhante já existia, a duplicação do cubo. Após inúmeras tentativas, Menecmo o resolveu através de secções em um cone reto. Outros problemas semelhantes, mas com cones em outros formatos, também foram solucionados por ele, tornando-se a principal referência na área das cônicas.

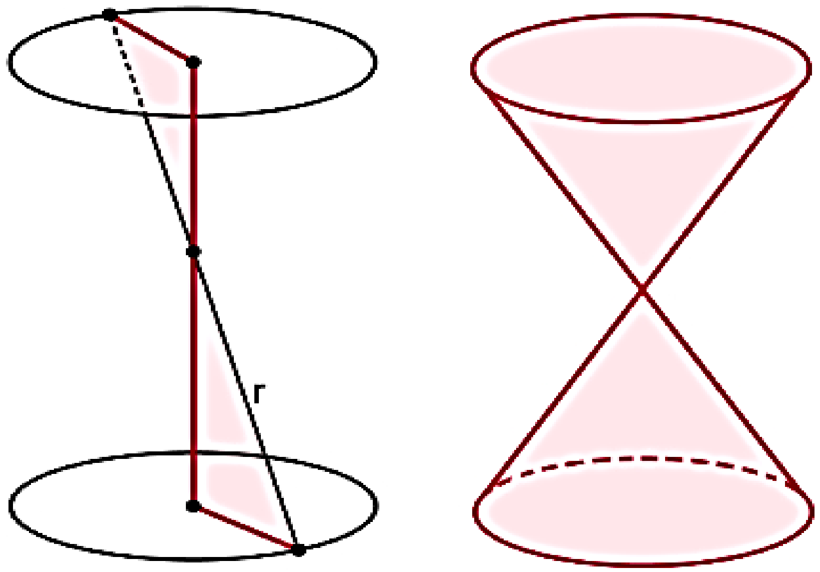
As figuras cônicas receberam outros nomes, variando de acordo com os nomes de onde surgiam. Mas tarde, Apolônio deu os nomes de **elipse**, **parábola** e **hipérbole**.

2. CÔNICAS

Cônicas são figuras geométricas planas definidas a partir da intersecção de um cone duplo de revolução com um plano. As figuras que podem ser obtidas nessa intersecção, e que podem ser chamadas de cônicas, são: **elipse**, **parábola** e **hipérbole**.

O cone duplo de revolução é conseguido com o giro de uma reta r sobre um eixo, que, por sua vez, é outra reta concorrente à reta r.

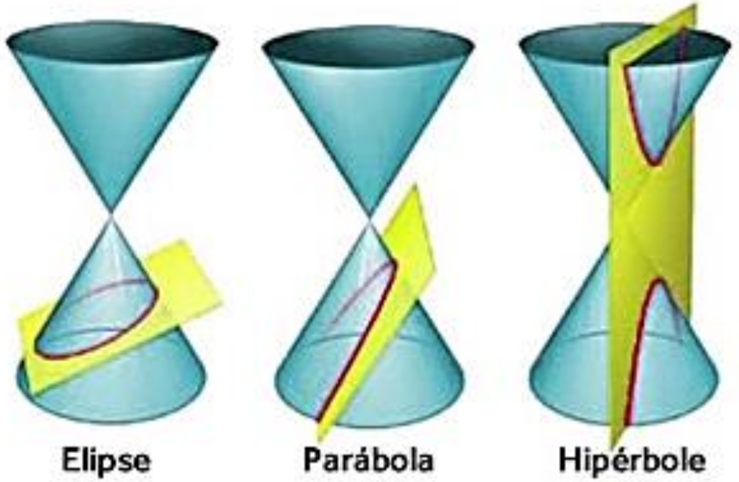
A imagem a seguir mostra a reta que foi girada, o eixo e a figura obtida a partir dessa revolução.



Todas as definições das cônicas são baseadas na distância entre dois pontos, que podem ser encontrado no plano por meio do Teorema de Pitágoras.

As cônicas ou secções cônicas são curvas obtidas pela intersecção de um plano com um cone duplo. De acordo com a inclinação desse plano, a curva será chamada de elipse, hipérbole ou parábola.

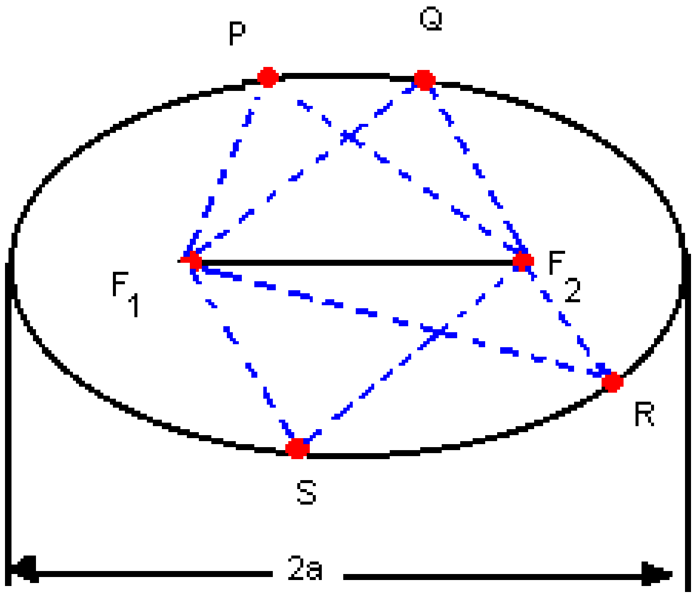
Quando o plano está paralelo ao plano da base do cone, a curva é uma circunferência sendo considerada um caso particular da elipse. Conforme aumentamos a inclinação do plano, encontramos as demais curvas, como mostrado na imagem abaixo:



3. ELIPSE

Considerando, num plano α, dois pontos distintos, F_1 e F_2 e, sendo 2a um número real maior que a distância entre F_1 e F_2, chamamos de elipse o conjunto dos pontos do plano α tais que a soma das distâncias desses pontos a F_1 e F_2 sejam sempre igual a 2a.

Por exemplo, sendo P, Q, R, S, F_1 e F_2 pontos de um mesmo plano e $F_1F_2 < 2a$, temos:



$$\begin{cases} d_{F_1P} + d_{F_2P} = 2a \\ d_{F_1Q} + d_{F_2Q} = 2a \\ d_{F_1R} + d_{F_2R} = 2a \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ d_{F_1S} + d_{F_2S} = 2a \end{cases}$$

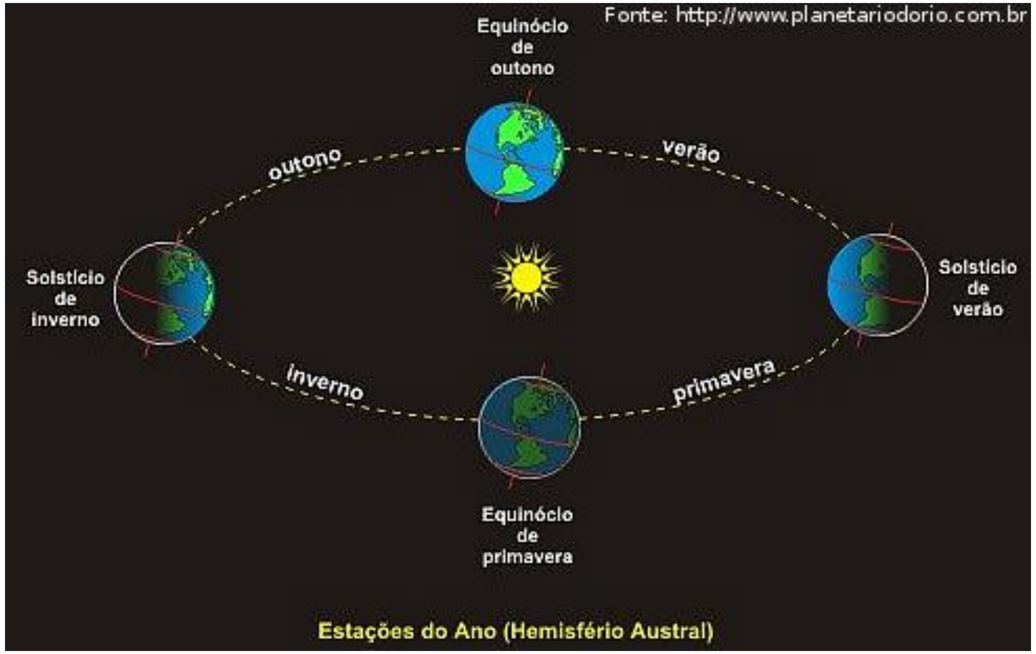
A figura obtida é uma elipse.

OBSERVAÇÕES:

1º) A Terra descreve uma trajetória elíptica em torno do Sol, que é um dos focos dessa trajetória. A Lua em torno da Terra e dos demais satélites em relação a seus respectivos planetas também apresentam esse comportamento.

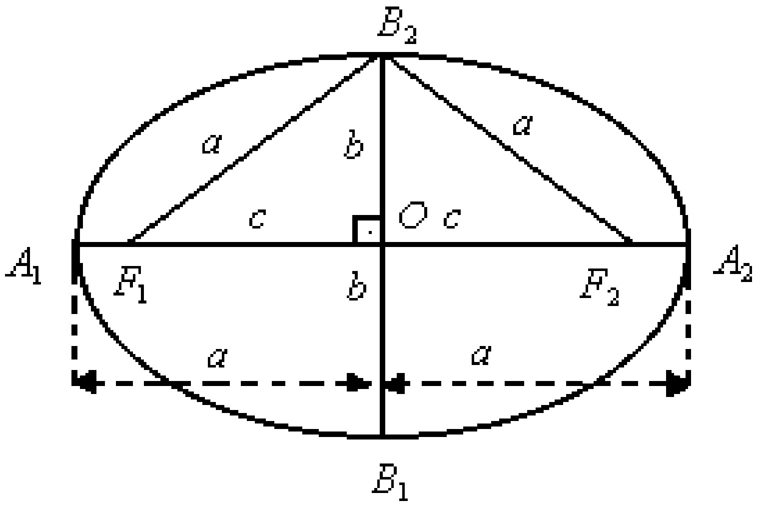
2º) O cometa de Halley segue uma órbita elíptica, tendo o Sol como um dos focos.

3º) No estudo dos átomos, um campo da Física e da Química, as órbitas dos elétrons em torno do núcleo são elípticas.



Elementos:

Observe a elipse a seguir. Nela consideramos os seguintes elementos:



- Focos: os pontos F_1 e F_2;
- Centro: o ponto O, que é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;
- Vértices: os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2;
- Eixo maior: $|A_1A_2| = 2a$;
- Eixo menor: $|B_1B_2| = 2b$;
- Distância focal: $|F_1F_2| = 2c$.

Relação fundamental

Na figura acima aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo OF_2B_2, retângulo em O podemos escrever a seguinte relação fundamental:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Excentricidade:

Chamamos de excentricidade o número real *e* tal que: $\boxed{e = \frac{c}{a}}$

Pela definição de elipse, $2c < 2a$, então $c < a$ e, consequentemente, $0 < e < 1$.

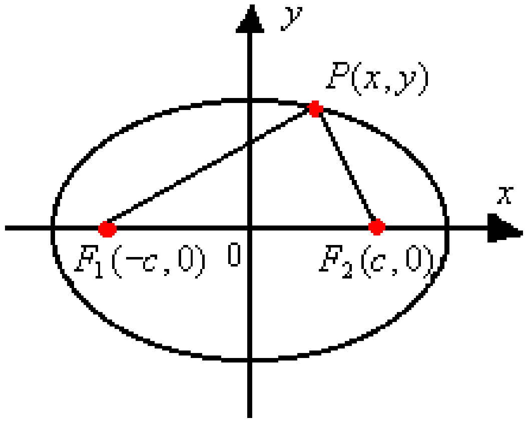
OBS:

A elipse é tanto mais achatada quanto mais próximo da unidade estiver a sua excentricidade, ou seja, quando $\underline{c}$ tende a ser igual a $\underline{a}$.

Raciocinando opostamente, se o valor de $\underline{c}$ se aproxima de zero, os valores de $\underline{a}$ e de $\underline{b}$ tendem a igualar-se e a elipse, no caso extremo de $\underline{c = 0}$, (o que implica $e = 0$) transforma-se numa circunferência. A circunferência é então, uma elipse de excentricidade nula.

Equação reduzida da elipse:

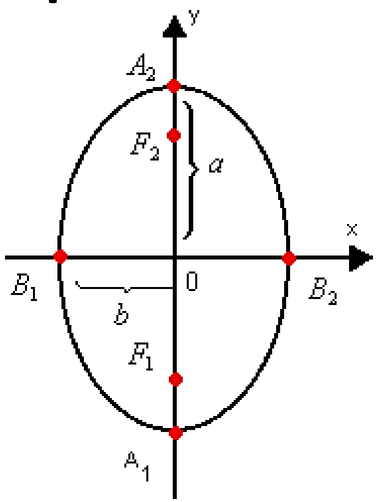
A) Elipse com centro na origem e eixo maior horizontal



Aplicando a definição de elipse $F_1P + F_2P = 2a$, obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

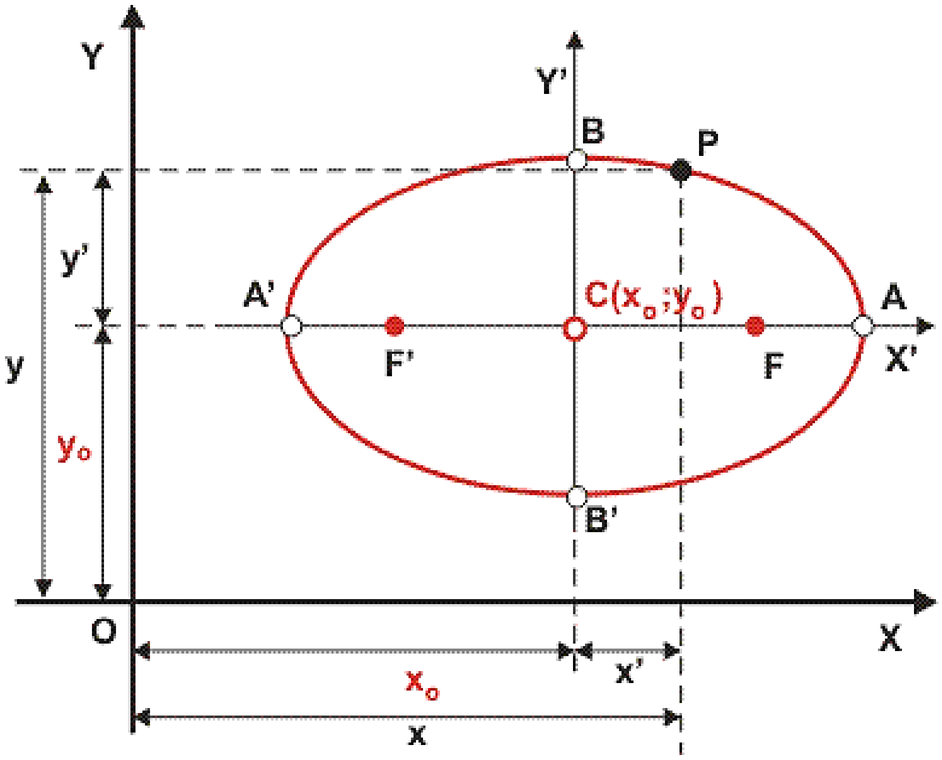
B) Elipse com centro na origem e eixo maior vertical



Aplicando novamente a definição de elipse, obtém-se:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

C) Elipse com centro fora da origem



P(x’, y’) coordenadas em relação aos eixos X’OY‘;
P(x, y) coordenadas em relação aos eixos XOY.

O gráfico nos mostra que: $x' = x - x_0$
$y' = y - y_0$

Equação da elipse em relação aos eixos X’CY’:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

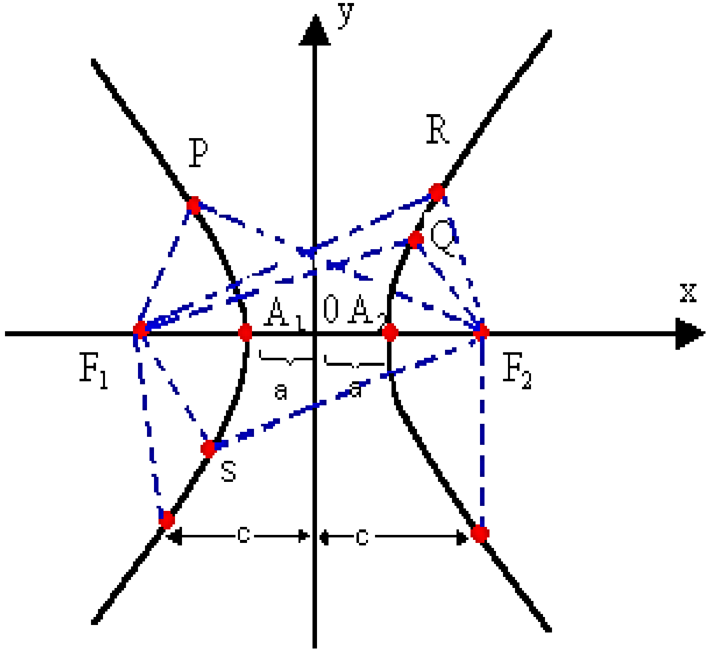
Equação da elipse em relação aos eixos X’CY’:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

4. HIPÉRBOLE

Considerando, num plano α, dois pontos distintos, F_1 e F_2 e, sendo 2a um número real menor que a distância entre F_1 e F_2, chamamos de hipérbole o conjunto dos pontos do plano α tais que o módulo da diferença das distâncias desses pontos a F_1 e F_2 sejam sempre igual a 2a.

Por exemplo, sendo P, Q, R, S, F_1 e F_2 pontos de um mesmo plano e $F_1F_2 = 2c$, temos:

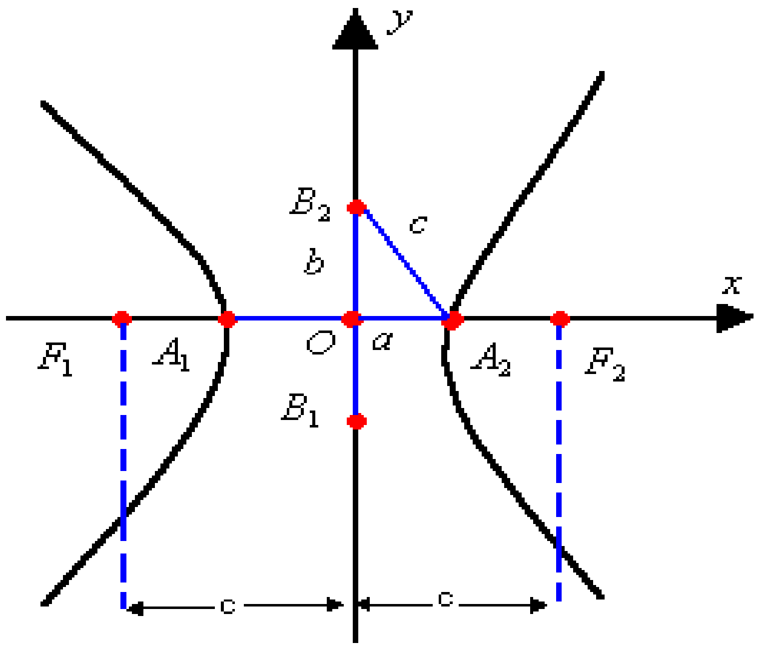


$$\begin{cases} |d_{F_1P} - d_{F_2P}| = 2a \\ |d_{F_1Q} - d_{F_2Q}| = 2a \\ |d_{F_1R} - d_{F_2R}| = 2a \\ \vdots \\ |d_{F_1S} - d_{F_2S}| = 2a \end{cases}$$

A figura obtida é uma hipérbole.

Elementos:

Observe a hipérbole a seguir. Nela consideramos os seguintes elementos:



- Focos: os pontos F_1 e F_2;
- Centro: o ponto O, que é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;
- Vértices: os pontos A_1 e A_2;
- Distância focal: $|F_1F_2| = 2c$;
- Eixo real: $|A_1A_2| = 2a$ (*contém os focos*);
- Eixo imaginário: $|B_1B_2| = 2b$ ($b > 0$).

Relação fundamental

Na figura acima aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo OF_2B_2, retângulo em O podemos escrever a seguinte relação fundamental:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

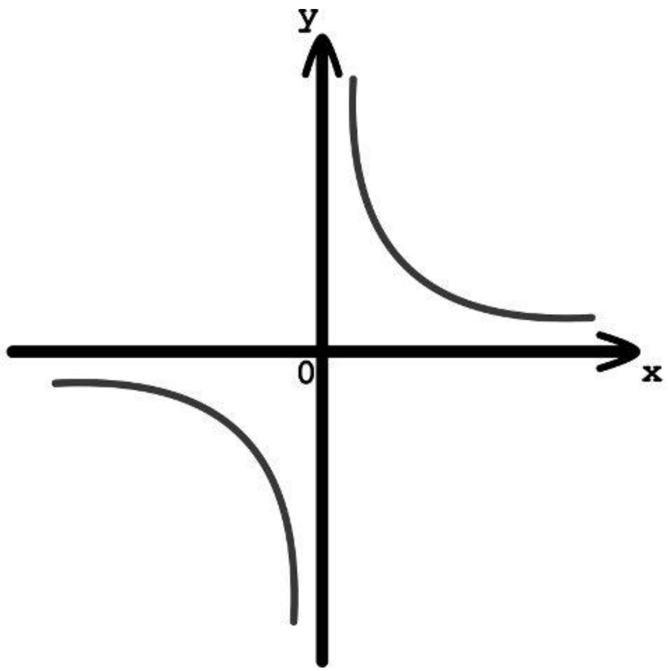
Excentricidade:

Chamamos de excentricidade o número real *e* tal que: $\boxed{e = \frac{c}{a}}$

Com $c > a$, temos $e > 1$.

APLICAÇÃO:

Uma das aplicações da hipérbole é na representação gráfica da função inversa.

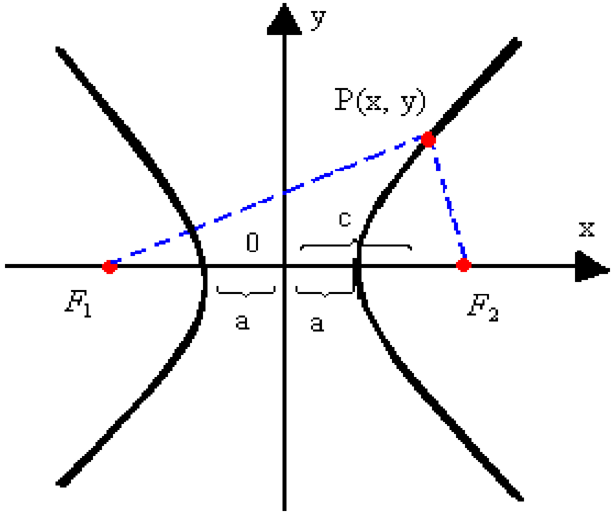


Equação reduzida da hipérbole:

A) Hipérbole com centro na origem e focos no eixo Ox

Aplicando a definição de hipérbole $|F_1P - F_2P| = 2a$, obtém-se:

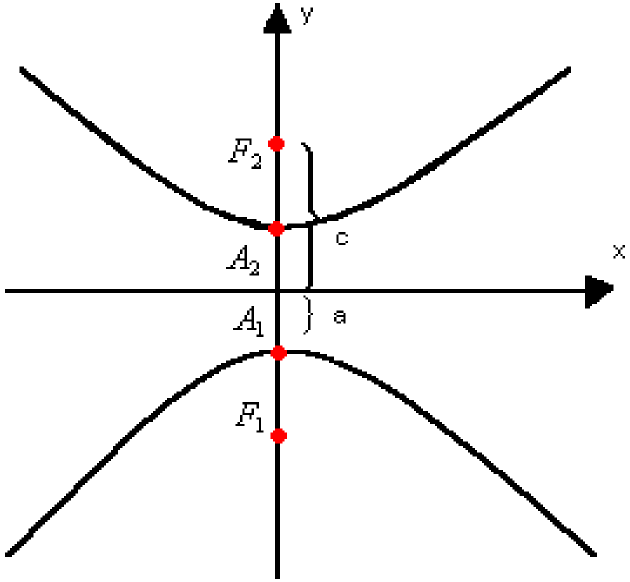
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



B) Hipérbole com centro na origem e focos no eixo Oy

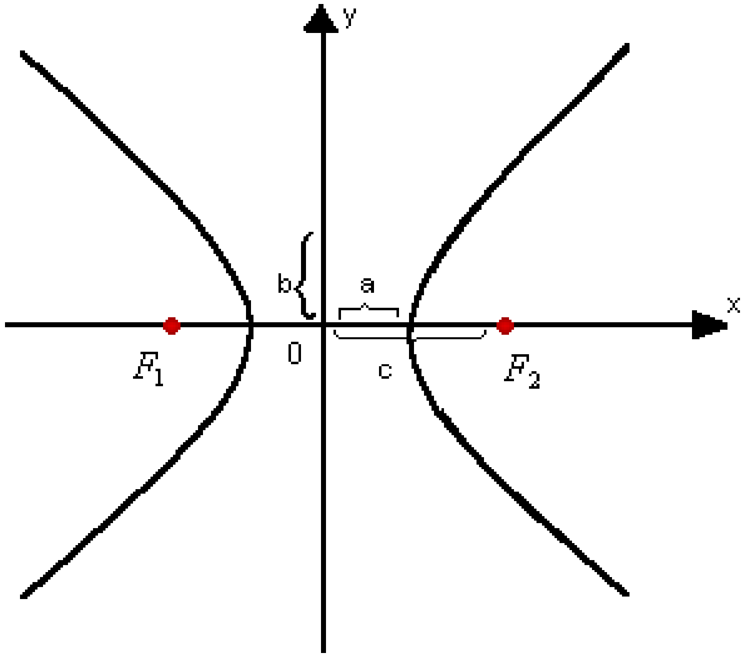
Aplicando novamente a definição de hipérbole, obtém-se:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Hipérbole equilátera

Uma hipérbole é chamada equilátera quando as medidas dos semieixos real e imaginário são iguais.

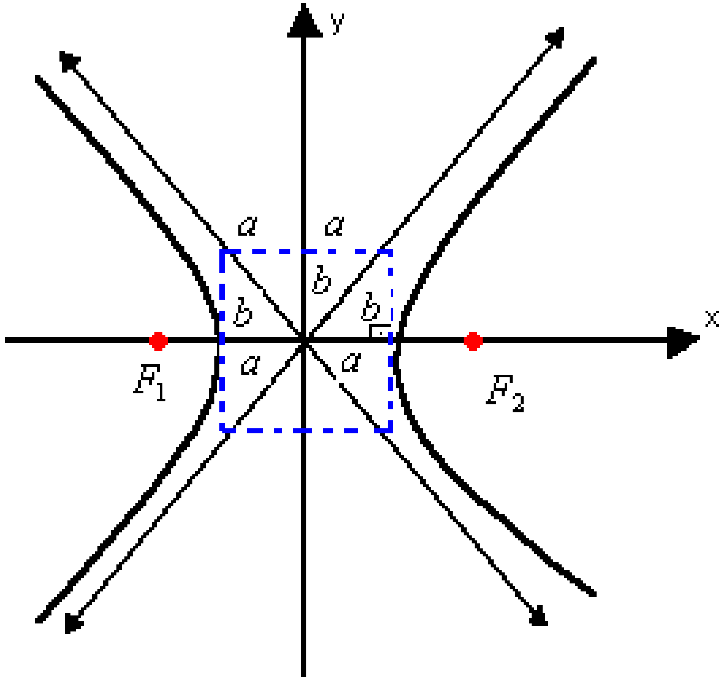


a = b

Assíntotas da hipérbole

Assíntotas são retas que contêm as diagonais do retângulo de lados $2a$ e $2b$.

Quando o eixo real é horizontal, o coeficiente angular dessas retas é $m = \pm\frac{b}{a}$, quando é vertical, o coeficiente é $m = \pm\frac{a}{b}$.



Equações das assíntotas da hipérbole

a) Eixo real horizontal

$$\boldsymbol{y = \pm\frac{b}{a}x}$$

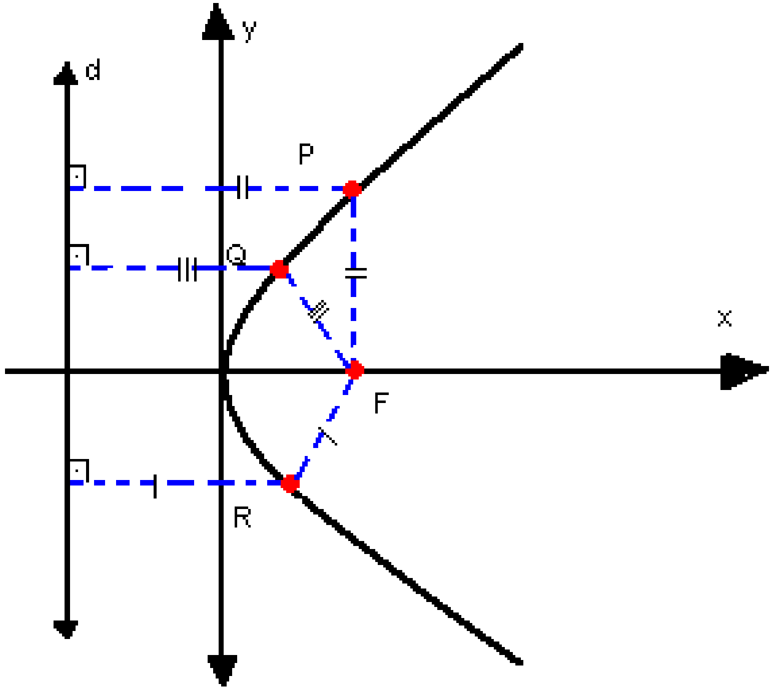
b) Eixo real vertical

$$\boldsymbol{y = \pm\frac{a}{b}x}$$

5. PARÁBOLA

Dados uma reta *d* e um ponto F (F $\notin$ *d*), de um plano α, chamamos de parábola o conjunto de pontos do plano α equidistantes de F e *d*.

Por exemplo, sendo F, P, Q e R pontos de um plano α e *d* uma reta desse mesmo plano, de modo que nenhum ponto pertença a *d*, temos:



$$\begin{cases} d_{FP} = d_{Pd} \\ d_{FQ} = d_{Qd} \\ d_{FR} = d_{Rd} \end{cases}$$

OBSERVAÇÕES:

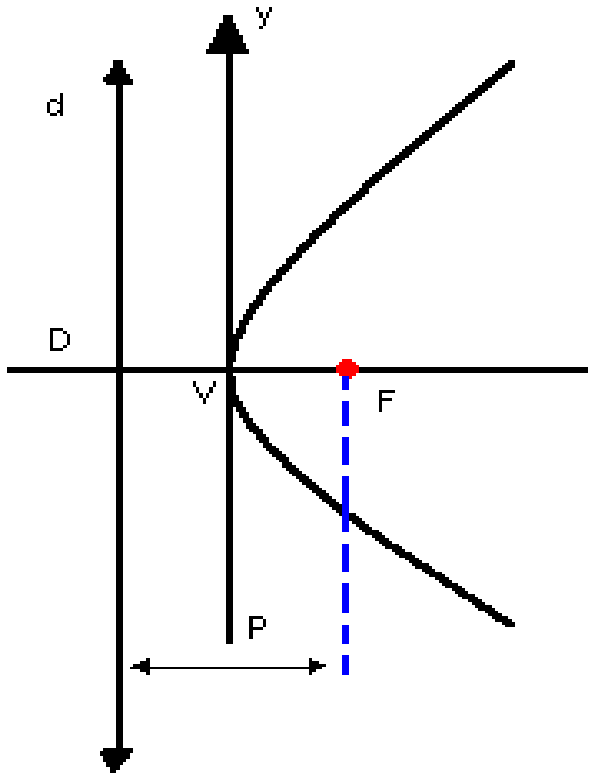
1º) Os telescópios refletores mais simples têm espelhos com secções planas parabólicas.

2º) As trajetórias de alguns cometas são parábolas, sendo que o Sol ocupa o foco.

3º) A superfície de um líquido contido em um cilindro que gira em torno de seu eixo com velocidade constante e parabólica.

Elementos:

Observe a parábola a seguir. Nela, temos os seguintes elementos:



- Foco: o ponto F;
- Vértice: o ponto V;
- Diretriz: a reta d;
- Parâmetro: p.

Então, temos que:

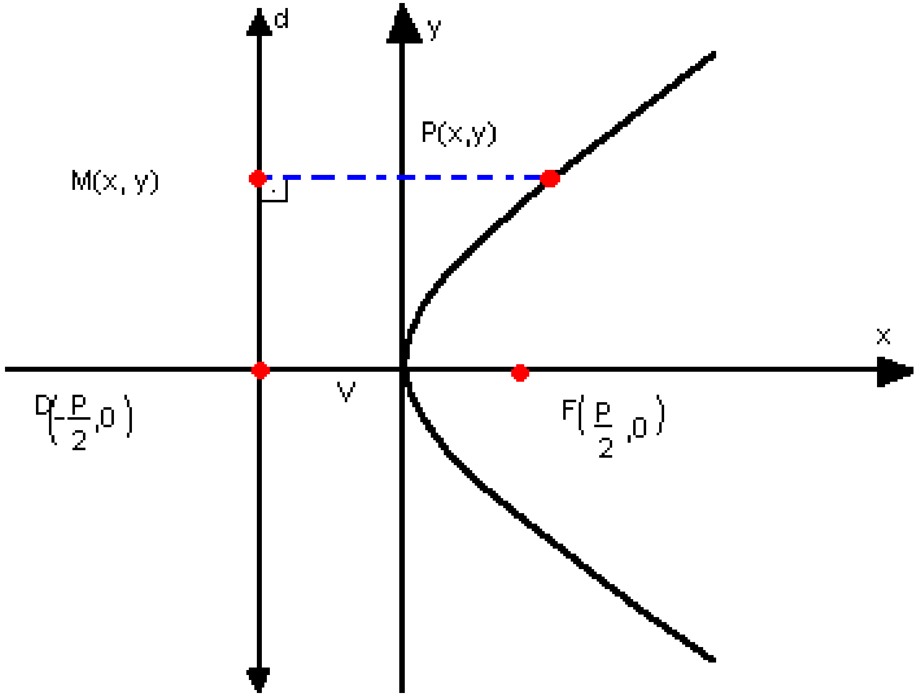
- O vértice V e o foco F ficam numa mesma reta, o eixo de simetria e.

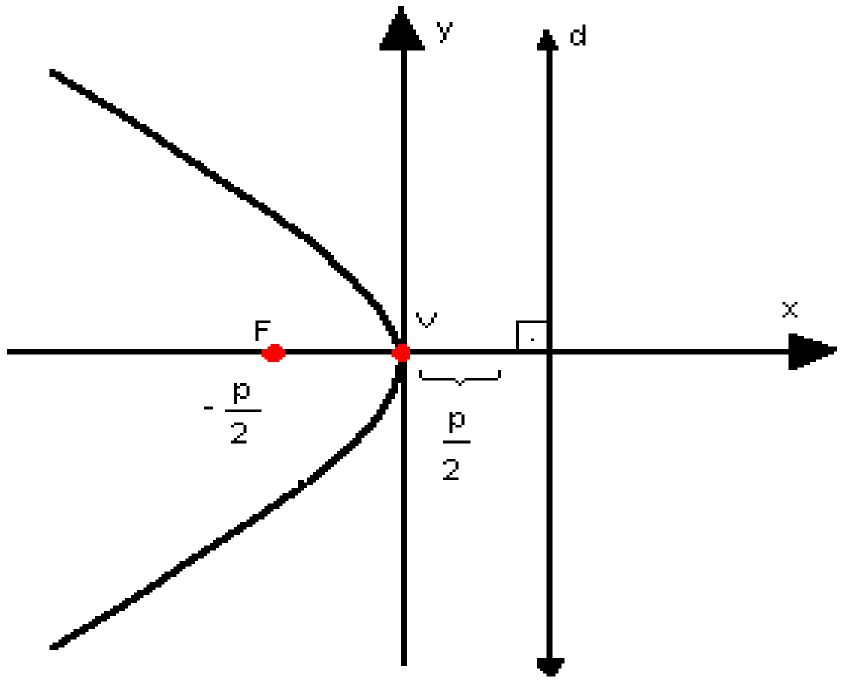
Assim, sempre temos $e \perp d$.

- DF = p;
- V é o ponto médio de $\overline{DF}$ (DV = VF = p/2)

Equação reduzida da parábola:

A) Parábola com vértice na origem e eixo de simetria horizontal

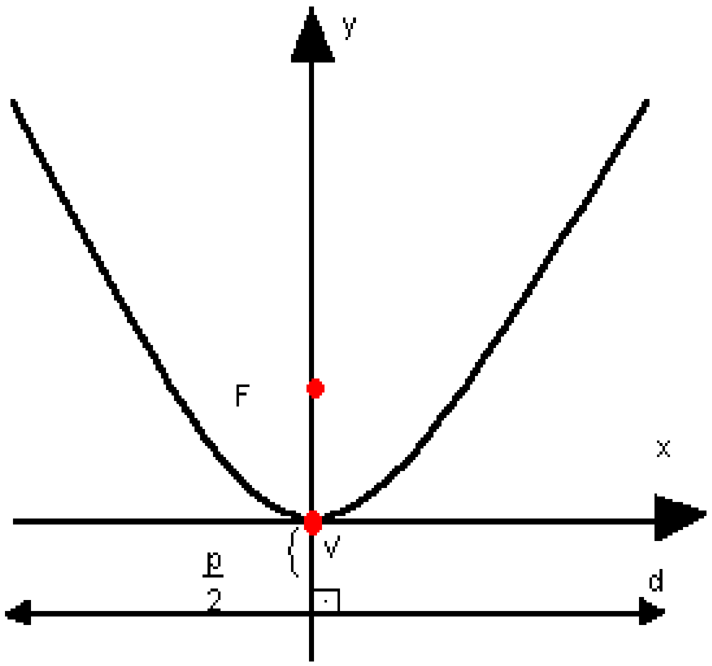


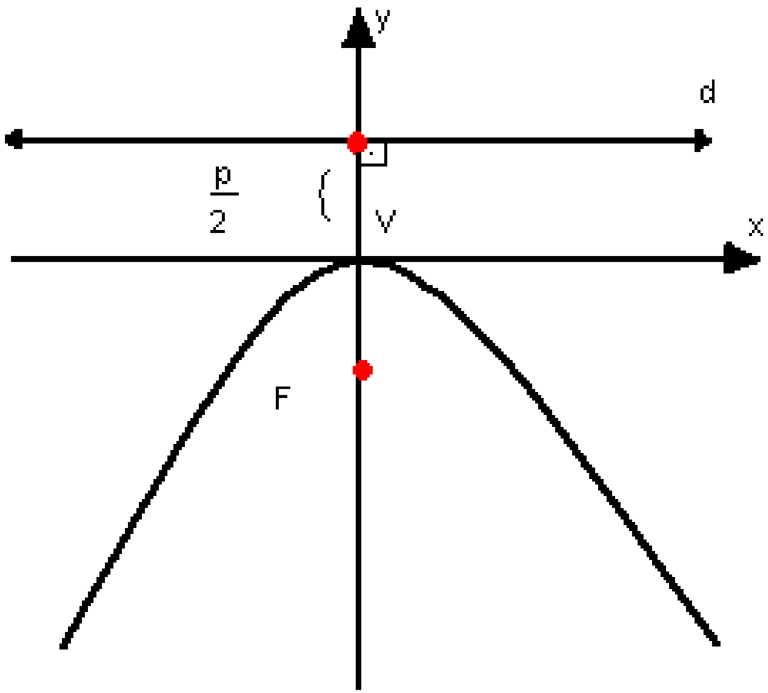


Equação da parábola: $y^2 = 2px$

Equação da parábola: $y^2 = -2px$

B) Parábola com vértice na origem e eixo de simetria vertical





Equação da parábola: $x^2 = 2py$

Equação da parábola: $x^2 = -2py$

Referências:

https://brasilescola.uol.com.br/
https://www.todamateria.com.br/
https://mundoeducacao.uol.com.br/
https://www.educamaisbrasil.com.br/
https://www.coladaweb.com/
https://www.somatematica.com.br/