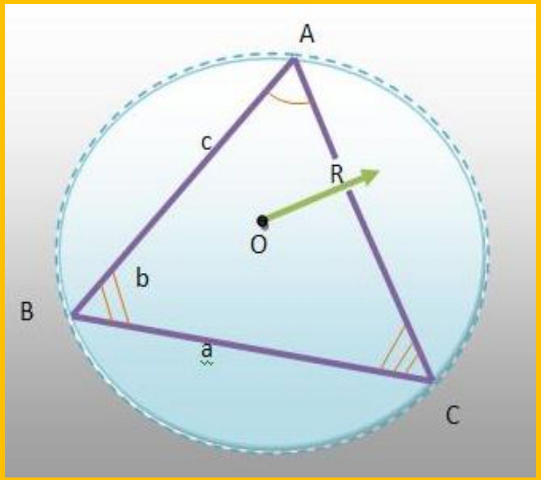
CENTRO EDUCACIONAL MARAPENDI – CEMP

GEOMETRIA – Prof. Clovis Reis

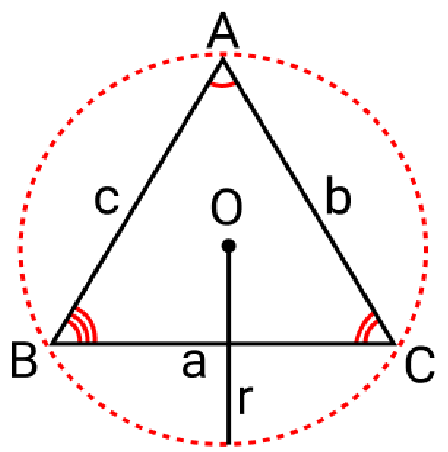
TRIGONOMETRIA EM UM TRIÂNGULO QUALQUER



1. LEI DOS SENOS

A **Lei dos Senos** estabelece que em um triângulo qualquer as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Portanto, a Lei dos Senos relaciona dois lados e dois ângulos de um triângulo.

Além disso, se um triângulo for inscrito numa circunferência de raio **r**, a medida do diâmetro (2r) da circunferência será a razão de proporcionalidade.

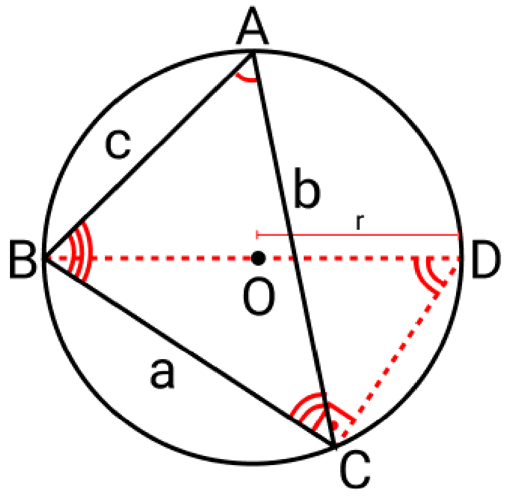


$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2r$$

Demonstração:

Construindo uma reta a partir de B, passando pelo centro O até chegar à circunferência, que chamaremos de ponto D.

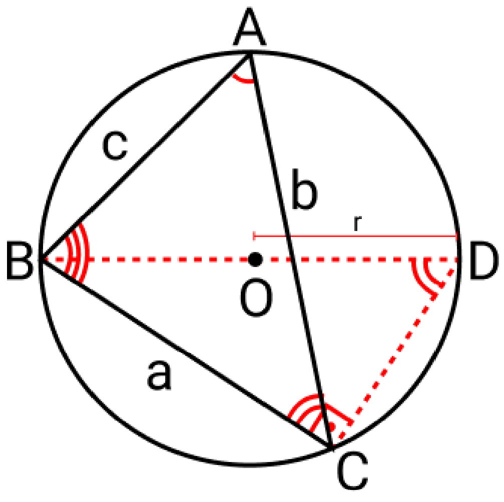
Construindo outra reta de D até o ponto C, ter-se-á um triângulo retângulo BCD, retângulo em C.



De acordo com a figura, temos que:
Se BD = 2r (diâmetro), então conclui-se que BCD = 90º.

$$sen(D) = \frac{BC}{BD} \Leftrightarrow sen(D) = \frac{BC}{2.r} \Leftrightarrow 2.r = \frac{BC}{sen(D)}$$

Ainda de acordo com o teorema do ângulo inscrito, BAC = BDC, pois são ângulos inscritos na circunferência no mesmo arco. Logo, sen(D) = sen(A).



Como sen(D) = sen(A), então tem-se que:

$$2.r = \frac{BC}{sen(A)} \Leftrightarrow 2.r = \frac{a}{sen(A)}$$

Da mesma forma, tem-se que:

$$2.r = \frac{b}{sen(B)} \ e \ 2.r = \frac{c}{sen(C)}$$

E assim, conclui-se que:

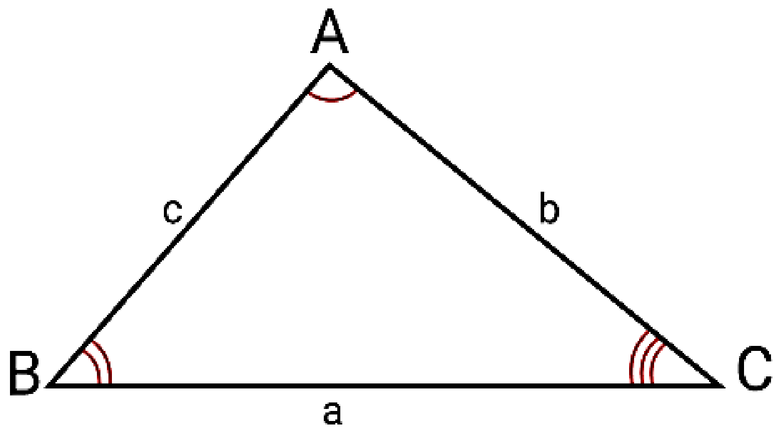
$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)} = 2.r$$

2. LEI DOS COSSENOS

A **Lei dos Cossenos** é utilizada para relacionar os três lados de um triângulo qualquer e um dos seus ângulos.

O enunciado da Lei dos Cossenos diz que:

"Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles."

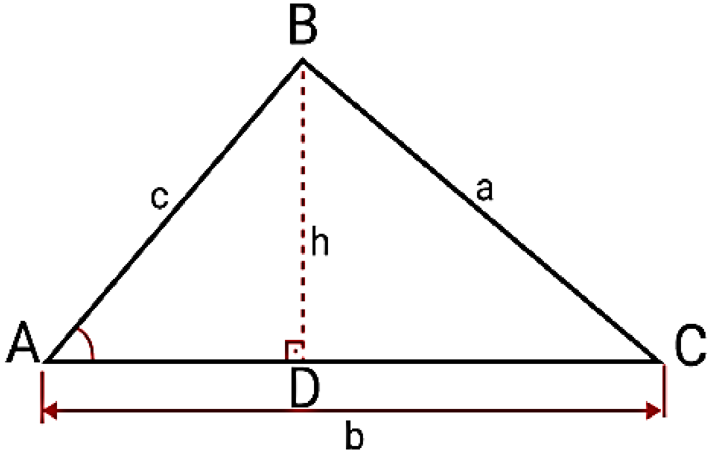


Dado o triângulo ABC ao lado, pela Lei dos Cossenos, temos que:

- **$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(A)$**
- **$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos(B)$**
- **$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(C)$**

Demonstração:

Considerando o ΔABC da figura, com altura **h** em relação ao lado AC.



No triângulo retângulo ABD, tem-se o seguinte: $\cos(A) = \dfrac{AD}{AB} \Leftrightarrow AD = c.\cos(A)$

A base do triângulo CD, tem-se que: CD = b – AD $\Rightarrow$ CD = b – c.cos(A)

Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras: i) $a^2 = h^2 + CD^2$

ii) $c^2 = h^2 + AD^2$

Logo, $h^2 = a^2 - CD^2 = c^2 - AD^2$.

Substituindo: $CD = b - c.\cos(A)$ em $h^2 = a^2 - CD^2$, obtém-se: $h^2 = a^2 - (b - c.\cos(A))^2$.
Substituindo: $AD = c.\cos(A)$ em $h^2 = c^2 - AD^2$, obtém-se: $h^2 = c^2 - (c.\cos(A))^2$.

Igualando as expressões, tem-se:

$$a^2 - (b - c.\cos(A))^2 = c^2 - (c.\cos(A))^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - (b^2 - 2.b.c.\cos(A) + c^2.\cos^2(A)) = c^2 - c^2.\cos^2(A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - b^2 + 2.b.c.\cos(A) - c^2.\cos^2(A) = c^2 - c^2.\cos^2(A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(A)}$$

Analogamente, para a altura do triângulo em relação aos outros lados, tem-se:

- $\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos(B)}$
- $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(C)}$

Referência:

https://www.todamateria.com.br/
https://matematicabasica.net/
https://brasilescola.uol.com.br/